Aufgabe 7.1

Geben Sie zu folgenden Sprachen an, ob es sich um eine reguläre Sprache oder um keine reguläre Sprache handelt. Begründen Sie jeweils Ihr Ergebnis.

(1) $L_1 = \{ a^m b^n \mid m,n \geq 1 \}$

(2) $L_2 = \{ a^{2n} b^n \mid 1 \leq n \leq 10 \}$

(3) $L_3 = \{ a^m b^n \mid m \geq n \geq 1 \}$

(4) $L_4 = \{ a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 1$, wobei $i \leq j$ oder $k \leq j$ oder beides $\}$

(5) $L_5 = \{ a^n \mid n = m^2$ für $m \geq 0 \}$

(6) $L_6 = \{ w\,w \mid w \in \{a, b\}^* \}$

Aufgabe 7.2

Gegeben sei die Grammatik G = (T, N, P, S), mit T = {a, b} und N = {S, A, B}. Geben Sie an, zu welchem Chomsky-Typ die durch die folgenden Produktionen gegebenen Grammatiken gehören und begründen Sie Ihr Ergebnis.

(1) $P = \{ S \rightarrow aSb \,;\, S \rightarrow aAb \,;\, A \rightarrow a \}$

(2) $P = \{ S \rightarrow bA \,;\, S \rightarrow aS \,;\, A \rightarrow b \}$

(3) $P = \{ S \rightarrow aAbb \mid abb \,;\, S \rightarrow Ab \,;\, A \rightarrow aAbB \mid abB \,;\, Bb \rightarrow bb \}$

(4) $P = \{ S \rightarrow bBAa \,;\, A \rightarrow Sa \,;\, a \rightarrow bA \,;\, B \rightarrow a \,;\, A \rightarrow bb \}$

(5) $P = \{ S \rightarrow bbAB \,;\, baB \rightarrow abaB \,;\, AB \rightarrow aB \,;\, bAa \rightarrow baa \}$

(6) $P = \{ S \rightarrow aS \mid Ab \,;\, A \rightarrow AA \mid bA \mid Ab \mid a \}$

Aufgabe 7.3

a) Geben Sie eine Grammatik G = (T, N, P, S) mit T = {0, 1} und N = {S, E} an, mit welcher sich die Sprache

$$L = \{ w \in \{0, 1\}^+ \mid |w|_1 \text{ ist durch 3 teilbar} \}$$

erzeugen lässt. L ist dabei die Sprache der Wörter über dem Alphabet {0, 1}, deren Anzahl „1" ohne Rest durch 3 teilbar ist.

b) Erzeugen Sie mit Hilfe von G die Testwörter $w_1 = 111$, $w_2 = 0111111$ und $w_3 = 0$.

Aufgabe 7.4

Gegeben sei die Grammatik G = ({a}, {S, A, B}, P, S) mit den Produktionen

$$P = \{ S \rightarrow ABA \;;\; AB \rightarrow aa \;;\; aA \rightarrow aaaA \;;\; A \rightarrow a \}.$$

a) Von welchem Chomskytyp ist die Grammatik?

b) Geben Sie alle Ableitungsschritte an, die nötig sind, um aus G das Wort aaaaa zu erzeugen.

c) Geben Sie die Sprache L = L(G) explizit in der Form $L = \{ w \in a^* \mid \dots \}$ an, in dem Sie die Menge der Worte von L(G) beschreiben.

d) Zeigen Sie, dass die Sprache L(G) regulär ist.

Hochschule RheinMain | FB DCSM

Sommersemester 2017 | Fabio Campos

Lösungen zum Übungsblatt 7

Automatentheorie und Formale Sprachen

22. Juni 2017

Aufgabe 7.1

(1) Regulär, weil sich hierzu einen regulären Ausdruck (a^+b^+) angeben lässt.

(2) Regulär, weil sich hierzu einen endlichen Automat (EA) mit L(EA) = L_2 angeben lässt.

(3) Angenommen L_3 sei regulär, dann existiert nach dem Pumping-Lemma eine Zahl k, sodass für alle Wörter $w \in L_3$ mit $|w| \geq k$ gilt. w lässt sich zerlegen in $w = xyz$, wobei gilt:

(a) $|xy| \leq k$

(b) $|y| > 0$

(c) $xy^iz \in L_3$ für $\forall\ i \geq 0$

Wir betrachten nun das Wort $w = a^kb^k$.
Es gilt $w \in L_3$ und $|w| \geq k$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung von w, mit $|xy| \leq k$ und $|y| > 0$, daraus folgt, dass $y = a^j$ für $1 \leq j \leq k$.
Wir setzen $i = 0$, dann gilt $xy^0z = xz = a^{k-j}b^k \notin L_3$.
Widerspruch zu (c). Es folgt, L_3 ist nicht regulär.

(4) Angenommen L_4 sei regulär, dann existiert nach dem Pumping-Lemma eine Zahl k, sodass für alle Wörter $w \in L_4$ mit $|w| \geq k$ gilt. w lässt sich zerlegen in $w = xyz$, wobei gilt:

(a) $|xy| \leq k$

(b) $|y| > 0$

(c) $xy^iz \in L_3$ für $\forall\ i \geq 0$

Wir betrachten nun das Wort $w = a^kb^kc^{k+1}$.
Es gilt $w \in L_4$ und $|w| \geq k$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung von w, mit $|xy| \leq k$ und $|y| > 0$, daraus folgt, dass $y = a^j$ für $1 \leq j \leq k$.
Dann ist $xy^2z = a^{k+j}b^kc^{k+1}$ und somit ist $xy^2z \notin L_4$.
Widerspruch zu (c). Es folgt, L_4 ist nicht regulär.

(5) Angenommen L_5 sei regulär, dann existiert nach dem Pumping-Lemma eine Zahl k, sodass für alle Wörter $w \in L_5$ mit $|w| \geq k$ gilt. w lässt sich zerlegen in $w = xyz$, wobei gilt:

(a) $|xy| \leq k$

(b) $|y| > 0$

(c) $xy^iz \in L_5$ für $\forall\ i \geq 0$

Wir betrachten nun das Wort $w = a^{k^2}$.

Es gilt $w \in \mathrm{L}_5$ und $|w| \geq k$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung von w, mit $|xy| \leq k$ und $|y| > 0$.

Wir setzen $i = 2$, wobei nach (c) $xy^2z \in \mathrm{L}_5$ gelten muss.

Weiterhin gilt folgendes: $|w| = k^2 = |xyz|$, nach (b) gilt $|xyz| < |xy^2z| \leq k^2 + k < (k+1)^2$, somit gilt $k^2 < |xy^2z| < (k+1)^2$, daraus folgt, dass $|xy^2z|$ keine Quadratzahl ist.

Widerspruch, daraus folgt, L_5 ist nicht regulär.

(6) Angenommen L_6 sei regulär, dann existiert nach dem Pumping-Lemma eine Zahl k, sodass für alle Wörter $w \in \mathrm{L}_6$ mit $|w| \geq k$ gilt. w lässt sich zerlegen in $w = xyz$, wobei gilt:

(a) $|xy| \leq k$

(b) $|y| > 0$

(c) $xy^iz \in \mathrm{L}_6$ für $\forall\, i \geq 0$

Wir betrachten nun das Wort $w = a^k b^k a^k b^k$. Es gilt $w \in \mathrm{L}_6$ und $|w| \geq k$. Sei $w = xyz$ eine beliebige Zerlegung von w, mit $|xy| \leq k$ und $|y| > 0$, daraus folgt, dass $y = a^j$ für $1 \leq j \leq k$.

Wir setzen $i = 0$, dann gilt $xy^0z = xz = a^{k-j}b^k a^k b^k \notin \mathrm{L}_6$ im Widerspruch zu (c).

Es folgt, L_6 ist nicht regulär.

Anmerkung: In diesem Fall gilt weiterhin $xy^iz \notin \mathrm{L}_6$ für alle $i \geq 2$.

Aufgabe 7.2

(1) Typ 2

(2) Typ 3

(3) Typ 1

(4) Typ 0

(5) Typ 1

(6) Typ 2

Aufgabe 7.3 (a) Als Entwurfsidee soll der folgende DEA dienen:

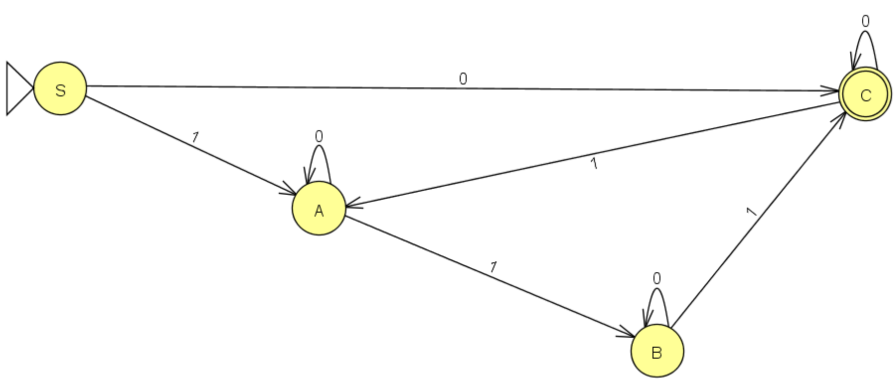

Abbildung 1: DEA : (0 | 0*10*10*10*)$^+$

Daraus lassen sich folgende Typ-3-Ableitungen ablesen:

(i) $S \implies 1A$

(ii) $S \implies 0C$

(iii) $A \implies 1B$

(iv) $A \implies 0A$

(v) $B \implies 1C$

(vi) $B \implies 0B$

(vii) $C \implies 1A$

(viii) $C \implies 0C$

(ix) $C \implies \epsilon$

Durch Anpassungen lassen sich die Nonterminalsymbole A, B, und C eliminieren. Die resultierende Grammatik lautet:

(1) $S \implies EEE \mid SEEE \mid 0 \mid 0S$

(2) $0E \implies E0$

(3) $E \implies 1$

Anmerkung 1: Die Regel $S \implies 0S$ dient zur Erzeugung des Terminalsymbols **0**.

Anmerkung 2: Regel (2) dient zur Verschiebung der Terminalsymbole **0** an beliebiger Stelle.

(b) $w_1 = 111 : S \implies \underline{E}EE \implies 1\underline{E}E \implies 11\underline{E} \implies 111$

$w_2 = 0111111 : S \implies \underline{S}EEE \implies \underline{S}EEEEEE \implies 0\underline{EEEEEE} \implies 0111111$

$w_3 = 0 : S \implies 0$

Aufgabe 7.4 (a) Typ 1

(b) $S \implies \underline{AB}A \implies a\underline{aA} \implies aaaa\underline{A} \implies aaaaa$

(c) $L = \{w \in a^* \mid a^{2n+1}, n \geq 1\}$

(d) Hierzu lässt sich folgender reguläre Ausdruck angeben: $aaa(aa)^*$